

1 Allgemeine Beziehungen

Allgemeine Beziehungen zwischen Zustandsgrößen

$$H = U + pV \quad \Psi = U - TS \quad G = H - TS \quad (\text{gelten auch spezifisch})$$

Totale Differentiale

$$dU = TdS - p dV \quad dH = T dS + V dp \quad dS = \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{rev}} \quad (\text{gelten auch spezifisch})$$

Masse

$$\text{Massenstrom: } \dot{m} = \rho \dot{V} = \rho A w$$

Energie

$$\text{Gesamte Energie: } E = U + KE + PE \quad \frac{E}{m} = e = u + ke + pe$$

$$\text{mit kinetischer Energie: } ke = \frac{KE}{m} = \frac{w^2}{2} \text{ und potentieller Energie: } pe = \frac{PE}{m} = g z$$

Arbeit

$$\text{Gesamte Arbeit: } W = W_V + W_t + W_{el} + W_\sigma + \dots$$

mit Volumenarbeit W_V , technischer Arbeit W_t , elektrischer Arbeit W_{el} , Oberflächenarbeit W_σ , und weiteren Arbeiten

2 Bilanzgleichungen

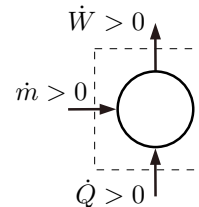
Allgemeine Bilanzgleichung einer Bilanzgröße X

$$\frac{dX(t)}{dt} = \dot{F}_{X,\text{zu}} - \dot{F}_{X,\text{ab}} + \dot{\sigma}_X \quad \text{mit } \dot{F}_{X,\text{zu}}: \text{Fluss von } X \text{ in System, } \dot{F}_{X,\text{ab}}: \text{Fluss von } X \text{ aus System, } \dot{\sigma}_X: \text{Quellterm}$$

Vorzeichenkonvention

Zugeführte Massen- und Wärmeströme sind positiv, abgeführte negativ einzusetzen.

Zugeführte Arbeitsströme sind negativ, abgeführte positiv einzusetzen (vgl. Abbildung rechts).



Energiebilanz

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \dot{m}_i(t) [h_i(t) + ke_i(t) + pe_i(t)] + \sum_j \dot{Q}_j(t) - \sum_n \dot{W}_n(t)$$

Spezialfälle mit Annahme $W = W_t + W_V$:

- Stationärer Fließprozess mit einem Massenstrom:
$$0 = \dot{m} \left[h_e - h_a + \frac{(w_e^2 - w_a^2)}{2} + g(z_e - z_a) \right] + \sum_j \dot{Q}_j - \sum_n \dot{W}_{t,n}$$
- Geschlossenes System an einem Kolben:
$$\frac{dE}{dt} = \sum_j \dot{Q}_j - \sum_n \dot{W}_{V,n} \quad \Delta E = E_2 - E_1 = \sum_j Q_j - \sum_n W_{V,n}$$
- Halboffenes System: (Systemmasse nicht konstant, Ein-/Ausschubbedingungen konstant)
$$\Delta E = m_2 u_2 - m_1 u_1 + \Delta KE + \Delta PE = \sum_i \Delta m_i \left[h_i + \frac{w_i^2}{2} + g z_i \right] + \sum_j Q_j - \sum_n W_n$$

Entropiebilanz

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \dot{m}_i(t) s_i(t) + \int_G \frac{\delta \dot{Q}(t)}{T_G(t)} + \dot{S}_{\text{erz}}(t) = \sum_i \dot{m}_i(t) s_i(t) + \sum_j \frac{\dot{Q}_j(t)}{\bar{T}_j(t)} + \dot{S}_{\text{erz}}(t)$$

Spezialfälle: mit der thermodynamischen Mitteltemperatur $\bar{T} = \frac{\int_e^a T ds}{s_a - s_e}$

- Stationärer Fließprozess
mit einem Massenstrom: $0 = \dot{m} [s_e - s_a] + \sum_j \frac{\dot{Q}_j}{\bar{T}_j} + \dot{S}_{\text{erz}}$
- Geschlossenes System: $\frac{dS}{dt} = \sum_j \frac{\dot{Q}_j}{\bar{T}_j} + \dot{S}_{\text{erz}}$ $\Delta S = S_2 - S_1 = m (s_2 - s_1) = \sum_j \frac{Q_j}{\bar{T}_j} + S_{\text{erz}}$
- Halboffenes System:
(Systemmasse nicht konstant,
Ein-/Ausschubbedingungen
konstant) $\Delta S = m_2 s_2 - m_1 s_1 = \sum_i \Delta m_i s_i + \sum_j \frac{Q_j}{\bar{T}_j} + S_{\text{erz}}$

Exergiebilanz

$$\frac{dE_x}{dt} = \sum_i \dot{E}_{x,\text{str},i}(t) + \sum_j \dot{E}_{x,Q,j}(t) - \sum_n \left[\dot{W}_n(t) - p_0 \frac{dV(t)}{dt} \right] - \dot{E}_{x,\text{verl}}(t)$$

- Exergie $E_x = E_{x,U} + KE + PE$
- Exergie der inneren Energie: $E_{x,U} = m e_{x,U} = m [u - u_0 - T_0 (s - s_0) + p_0 (v - v_0)]$
- Exergie einer Strömung: $\dot{E}_{x,\text{str}} = \dot{m} e_{x,\text{str}} = \dot{m} [h - h_0 - T_0 (s - s_0) + ke + pe]$
- Exergie eines Wärmestroms: $\dot{E}_{x,Q} = \int_G \left(1 - \frac{T_0}{T_G}\right) \delta \dot{Q} = \left(1 - \frac{T_0}{\bar{T}}\right) \dot{Q}$
- Exergie der Wärme: $E_{x,Q} = \int_G \left(1 - \frac{T_0}{T_G}\right) \delta Q = \left(1 - \frac{T_0}{\bar{T}}\right) Q$
- Exergieverlust: $\dot{E}_{x,\text{verl}} = T_0 \dot{S}_{\text{erz}}$

Spezialfälle mit Annahme $W = W_t + W_V$:

- Stationärer Fließprozess
mit einem Massenstrom: $0 = \overbrace{\dot{m} [h_e - h_a - T_0 (s_e - s_a) + \Delta ke + \Delta pe]}^{-\Delta \dot{E}_{x,\text{str}} = \dot{E}_{x,\text{str},e} - \dot{E}_{x,\text{str},a}} + \sum_j \overbrace{\left(1 - \frac{T_0}{\bar{T}_j}\right) \dot{Q}_j}^{\dot{E}_{x,Q,j}} - \sum_n \dot{W}_{t,n} - \dot{E}_{x,\text{verl}}$
- Geschlossenes System an
einem Kolben: $\frac{dE_x}{dt} = \sum_j \left(1 - \frac{T_0}{\bar{T}_j}\right) \dot{Q}_j - \left[\sum_n \dot{W}_{V,n} - p_0 \frac{dV}{dt} \right] - \dot{E}_{x,\text{verl}}$
 $\Delta E_x = E_{x,2} - E_{x,1} = \sum_j \left(1 - \frac{T_0}{\bar{T}_j}\right) Q_j - \left[\sum_n W_{V,n} - p_0 (V_2 - V_1) \right] - E_{x,\text{verl}}$
- Halboffenes System:
(Systemmasse nicht konstant,
Ein-/Ausschubbedingungen
konstant) $\Delta E_x = \sum_i \Delta m_i e_{x,\text{str},i} + \sum_j \left(1 - \frac{T_0}{\bar{T}_j}\right) Q_j - \left[\sum_n W_n - p_0 \Delta V \right] - E_{x,\text{verl}}$

3 Stoffmodelle

Ideale Flüssigkeit ($v^{\text{if}} = \text{const.}$)

$$c_p^{\text{if}}(T) = c_v^{\text{if}}(T) = c^{\text{if}}(T)$$

$$u^{\text{if}}(T_2) - u^{\text{if}}(T_1) = \int_{T_1}^{T_2} c^{\text{if}}(T) dT$$

$$h^{\text{if}}(T_2, p_2) - h^{\text{if}}(T_1, p_1) = \int_{T_1}^{T_2} c^{\text{if}}(T) dT + v^{\text{if}}(p_2 - p_1)$$

$$s^{\text{if}}(T_2) - s^{\text{if}}(T_1) = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c^{\text{if}}(T)}{T} dT$$

Näherung bei Verwendung von Tabellenwerten
(gesättigte Flüssigkeit):

$$v^{\text{if}}(T, p) = v_f(T) \quad u^{\text{if}}(T, v) = u_f(T)$$

$$h^{\text{if}}(T, p) = h_f(T) + v^{\text{if}}(p - p_{\text{sat}}(T))$$

$$\text{Wenn } h_f(T) \gg v^{\text{if}}(p - p_{\text{sat}}(T)): \quad h^{\text{if}}(T, p) \approx h_f(T)$$

$$s^{\text{if}}(T, p) = s_f(T)$$

Ideales Gas ($pV = n\bar{R}T \quad pv = RT \quad pV = mRT$)

$$\bar{R} = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$$

$$R = c_p^{\text{ig}} - c_v^{\text{ig}} = \frac{\bar{R}}{M}$$

$$c_v^{\text{ig}}(T) = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v$$

$$c_p^{\text{ig}}(T) = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$$

$$\kappa = \frac{c_p^{\text{ig}}}{c_v^{\text{ig}}}$$

$$u^{\text{ig}}(T_2) - u^{\text{ig}}(T_1) = \int_{T_1}^{T_2} c_v^{\text{ig}}(T) dT$$

$$h^{\text{ig}}(T_2) - h^{\text{ig}}(T_1) = \int_{T_1}^{T_2} c_p^{\text{ig}}(T) dT$$

$$s^{\text{ig}}(T_2, p_2) - s^{\text{ig}}(T_1, p_1) = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_p^{\text{ig}}(T)}{T} dT - R \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)$$

Bei Verwendung von Tabellenwerten:

$$s^{\text{ig}}(T_2, p_2) - s^{\text{ig}}(T_1, p_1) = s^0(T_2) - s^0(T_1) - R \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)$$

Reales Fluid (2-Phasengebiet)

$$\text{Spezifische Zustandsgrösse} \quad \phi = v, u, h, s$$

$$\text{Dampfatafeln} \quad \phi = f(T, p)$$

$$\text{Nassdampf} \quad \phi = \phi_f + x(\phi_g - \phi_f)$$

$$\text{Dampfgehalt} \quad x = \frac{m_g}{m_g + m_f}$$

$$\text{Verdampfungsenthalpie} \quad h_{\text{fg}} = h_g - h_f$$

Perfektes Gas

$$c_v^{\text{pg}} = \text{const.} \quad c_p^{\text{pg}} = \text{const.} \quad \kappa = \frac{c_p^{\text{pg}}}{c_v^{\text{pg}}} = \text{const.}$$

$$u^{\text{pg}}(T_2) - u^{\text{pg}}(T_1) = c_v^{\text{pg}}(T_2 - T_1)$$

$$h^{\text{pg}}(T_2) - h^{\text{pg}}(T_1) = c_p^{\text{pg}}(T_2 - T_1)$$

$$s^{\text{pg}}(T_2, p_2) - s^{\text{pg}}(T_1, p_1) = c_p^{\text{pg}} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)$$

4 Zustandsänderungen

Zustandsänderungen

$$\text{Polytrope} \quad pV^n = \text{const.} \\ (n: \text{Polytropenexponent})$$

$$\text{Isobare} \quad p = \text{const.} \quad (n \equiv 0)$$

$$\text{Isotherme} \quad T = \text{const.}$$

$$\text{Isochore} \quad v = \text{const.} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\text{Isenthalpe} \quad h = \text{const.}$$

$$\text{Isentrope} \quad s = \text{const.}$$

Zustandsänderungen idealer Gase

$$\text{Isotherme} \quad n = 1$$

$$\text{Isentrope} \quad n = \kappa = \frac{c_p^{\text{ig}}}{c_v^{\text{ig}}}$$

$$\text{Polytropes} \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{n-1}$$

$$\text{Temperaturverhältnis}$$

Arbeit

$$w_{12} = w_{12}^{\text{rev}} - \varphi_{12} \quad \text{mit } \varphi_{12}: \text{Dissipation}$$

Spezifische Volumenarbeit

(reversible Änderung
des Systemvolumens)

$$w_{V,12}^{\text{rev}} = \frac{W_{V,12}^{\text{rev}}}{m} = \int_1^2 p \, dv$$

- für Polytrope, $n = 1$:

$$\left(\int_1^2 p \, dv \right)_{n=1} = p_1 v_1 \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right) = p_1 v_1 \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right)$$

- für Polytrope, $n \neq 1$:

$$\left(\int_1^2 p \, dv \right)_{n \neq 1} = \frac{1}{1-n} (p_2 v_2 - p_1 v_1)$$

- für Polytrope, $n \neq 1$:
(ideales Gas)

$$\left(\int_1^2 p \, dv \right)_{n \neq 1} = \frac{1}{1-n} (p_2 v_2 - p_1 v_1) = \frac{R(T_2 - T_1)}{1-n}$$

Spezifische technische Arbeit

(reversibler stationärer
Fließprozess)

$$w_{t,12}^{\text{rev}} = \frac{\dot{W}_{t,12}^{\text{rev}}}{\dot{m}} = - \left(\int_1^2 v \, dp + \Delta ke + \Delta pe \right)$$

- für Polytrope, $n = 1$:

$$\left(\int_1^2 v \, dp \right)_{n=1} = - \left(\int_1^2 p \, dv \right)_{n=1}$$

- für Polytrope, $n \neq 1$:

$$\left(\int_1^2 v \, dp \right)_{n \neq 1} = -n \left(\int_1^2 p \, dv \right)_{n \neq 1}$$

5 Wirkungsgrade (Nutzen/Aufwand)

Thermischer Wirkungsgrad

$$\eta_{\text{th}} = \frac{|W_{\text{nutz}}|}{|Q_{\text{zu}}|}$$

für Kreisprozesse:

$$\eta_{\text{th,KP}} = \frac{|W_{\text{KP}}|}{|Q_{\text{zu}}|} = 1 - \frac{|Q_{\text{ab}}|}{|Q_{\text{zu}}|}$$

Carnotscher Wirkungsgrad

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_{\text{ab}}}{T_{\text{zu}}}$$

Leistungszahl (Wärmepumpe)

$$\varepsilon_{\text{W}} = \frac{|\dot{Q}_{\text{ab}}|}{|\dot{W}_{\text{t}}|} = \frac{|\dot{Q}_{\text{ab}}|}{|\dot{Q}_{\text{ab}}| - |\dot{Q}_{\text{zu}}|}$$

Leistungszahl (Kältemaschine)

$$\varepsilon_{\text{K}} = \frac{|\dot{Q}_{\text{zu}}|}{|\dot{W}_{\text{t}}|} = \frac{|\dot{Q}_{\text{zu}}|}{|\dot{Q}_{\text{ab}}| - |\dot{Q}_{\text{zu}}|}$$

Isentroper Wirkungsgrad (Verdichter)

$$\eta_{V,s} = \frac{w_{t,12}^{\text{rev}}}{w_{t,12}}, \quad \text{wenn adiabat und } \Delta ke + \Delta pe = 0: \quad \eta_{V,s} = \frac{h_1 - h_{2,s}}{h_1 - h_2}$$

Isentroper Wirkungsgrad (Turbine)

$$\eta_{T,s} = \frac{w_{t,12}^{\text{rev}}}{w_{t,12}}, \quad \text{wenn adiabat und } \Delta ke + \Delta pe = 0: \quad \eta_{T,s} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2,s}}$$

Exergetischer Wirkungsgrad

$$\varepsilon = \frac{\dot{E}_{\text{x,nutz}}}{\dot{E}_{\text{x,zu}}}$$

Grosse Teile dieser Formelsammlung wurden dankend von Prof. Poulikakos (LTNT) übernommen.